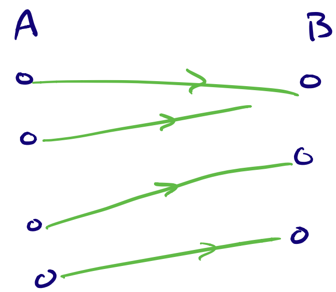
Relazioni

una relazione binaria da $A \to B$



assegniamo un elemento di B a ogni elemento di A

formalmente, descriviamo la relazione come un

sottoinsieme $R \subseteq \underline{A \times B}$

elementi $(a,b) \in R$ $\quad \underline{aRb}$

dominio di $R := \{a \in A \mid \exists\, b \in B : (a,b) \in R\}$

codominio di $R := \{b \in B \mid \exists\, a \in A : (a,b) \in R\}$

<u>Relazioni inverse</u>: dato R una relazione binaria

$$R^{-1} \subseteq B \times A = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in R\}$$

Proprietà: R una relazione ~~su~~ binaria su $A \times A$

R <u>riflesiva</u> se $aRa \ \forall a \in A$ $\quad (a,a) \in R$

R <u>simmettrica</u> se $\forall a,b \in A \quad aRb \Rightarrow bRa$

se $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$

R <u>antisimmetrica</u> se $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R \ \underline{\forall a,b}$

R <u>transitiva</u> $aRb,\ bRc \Rightarrow aRc \quad \forall a,b,c \in A$

Relazioni di equivalenza

S un insieme non vuoto. una relazione R su S $(R \subseteq S \times S)$ é una <u>relazione di equivalenza</u> se

1. R é riflessiva : $\forall a \in S,\ aRa$
2. R é simmetrica : $\forall a,b \in S : aRb \Rightarrow bRa$
   se $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$
3. R é transitiva : $\forall a,b,c \in S \quad aRb,\ bRc \Rightarrow aRc$

esempio di relazione di equivalenza

$S = \mathbb{N}$ $\quad R$ la relazione "$\leq$" $\quad xRy \Leftrightarrow x \leq y$

proprietà

1) reflessività : $\forall x \in \mathbb{N},\ x \leq x$ quindi xRx ✓
2) simmetrica : $x, y \in \mathbb{N},\ x \neq y \quad x \leq y \not\Rightarrow y \leq x$ NON soddisfato!
3) transitiva : $\forall x,y,z \in \mathbb{N} \quad x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ✓

esempio: $S =$ insieme di reti nel piano

rRt se r e t sono paralleli

due reti sono paralleli se le line definite so uguali o non-intersettano.

~~simmetrica~~ - riflessività rRr per ogni linea r nel piano

- simmetrica $rRt \Rightarrow tRr$ per ogni r e t

- transitività : rRs, $sRt \Rightarrow rRt$ ✓

esempio

anche la proprietà "=" sul insieme $\mathbb{N}$ é una relazione di equivalenza.

Classi di Equivalenza

Sia S un insieme, R una relazione di equivalenza su S, $a \in S$, la classe di equivalenza di a

$$[a]_R := \{ x \in S \mid (a,x) \in R \}$$

Os S insieme, R rel. di equiv. $a \in S$ se

$$b \in [a]_R \Rightarrow [a]_R = [b]_R$$

dim $[a]_R, [b]_R \subseteq S \times S$, quindi per dimostrare che sono uguali, basta dimostrare che

$$[a]_R \subseteq [b]_R \quad \text{AND} \quad [b]_R \subseteq [a]_R$$

per dimostrare che $X \subseteq Y$, sia $x \in X$ e dobbiamo dimostrare che $x \in Y$

sia $x \in [a]_R \Rightarrow aRx$ e dobbiamo dimostrare che bRx

per ipotesi, $b \in [a]_R \Rightarrow aRb \underset{\substack{\uparrow \\ \text{simmetrica}}}{\Rightarrow} bRa$

tutte insieme, abbiamo $\cancel{aR}$ bRa e aRx

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{transitività}}}{\Rightarrow} bRx \Rightarrow x \in [b]_R$

Conclusione $[a]_R \subseteq [b]_R$

lo stesso argomento dimostra che $[b]_R \subseteq [a]_R$

$\Rightarrow [a]_R = [b]_R$ ∎

Ogni $b \in [a]_R$ è detto una rappresentante della classe di equivalenza (perché come abbiamo appena visto, $[b]_R = [a]_R$)

Insiemi quozienti

S un insieme, $R \subseteq S \times S$ una relazione di equivalenza su S

L'insieme quoziente di S rispetto a R

scritto S/R è la collezione delle classe di equivalenza in S rispetto a R

$$S/R = \{ [a]_R \mid a \in S \} \leftarrow$$

Teorema S un insieme e R un rel. equiv. allora S/R é una partizione di S.

una partizione di S consiste di sottoinsieme $A_1, \dots, A_k$ Non vuoto t.c. $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$ e per $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$

dim dobbiamo dimostrare che

- $\bigcup_{a \in S} [a]_R = S$ $\sim$ per ogni elemento $x \in S$ $\exists$ un $[a]_R \in S/R$ con $x \in [a]_R$

- per $[a]_R, [b]_R \in S/R$, $[a]_R \neq [b]_R$ allora $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$

per il primo, per ogni $x \in S$ siccome la relazione di equiv. é riflessiva, allora xRx $\Rightarrow x \in [x]_R \in S/R$.

per il secondo punto: sia $[a]_R\ [b]_R \in S/R$ ~~diver~~ distinti, vogliamo dimostrare che $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ per assurdità, se $\exists$ un $y \in [a]_R$, $y \in [b]_R$ $\Rightarrow [a]_R = [y]_R$ e $[b]_R = [y]_R$ per l'osservazione sopra. Quindi $[a]_R = [y]_R = [b]_R$ $\not\to$ ∎

Ordini Parziali

una relazione R su un insieme S é un ordine parziale

se

1) é riflessiva $\forall a \in S \; aRa$

2) é antisimmetrica : la negazione di simmetrica

3) é transitiva

stessi come rel. di equiv.

simmetrica

$\forall a, b \in S$

$aRb \Rightarrow bRa$

negazione (anti-simmetrica)

$\exists a, b$ t.c.

$aRb \wedge (b, a) \notin R$

esempio

- "$\leq$" su $\mathbb{N}$ ✓
- "$\subseteq$" su un insieme $S \neq \emptyset$
- $a \mid b$ se $\frac{b}{a}$ sia un intero su $\mathbb{N}$
  - riflessiva $a \mid a$ ✓
  - é anti simmetrica : $2 \mid 10$ però $10 \nmid 2$ ✓

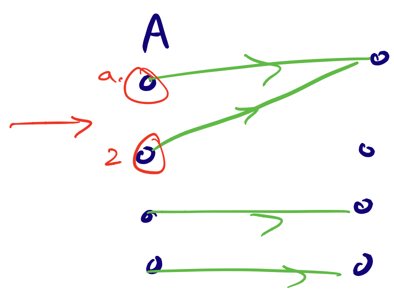
- $a \mid b$, $b \mid c$ $\Rightarrow$ $b = x \cdot a$ per un intero x

  $c = y \cdot b$ per un intero y

  $\Rightarrow c = x \cdot y \cdot a \Rightarrow a \mid c$ ✓

"$=$" é una ord. parziale? <u>NO</u>

<u>Funzioni</u> A, B due insieme supponiamo che ad ogni elemento di A assegniamo un unico elemento di B



la collezione di questi assegnamenti e una <u>funzione</u>

se $f(x) = y$ che y sia <u>l'immagine</u> di x.

suriettività $:=$ una funzione $f: A \to B$ é <u>suriettiva</u> se per ogni $b \in B$ $\exists$ $a \in A$ t.c. $f(a) = b$.

iniettività $:=$ una funzione $f: A \to B$ é <u>iniettiva</u> se $\forall$ $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ allora $f(a_1) \neq f(a_2)$

<u>oppure</u> if $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

se f é suriettiva e iniettiva $\Rightarrow$ detto bijettiva

Primi concetti sui grafi

$\binom{X}{2}$:= insieme di sottoinsiemi di X di card. 2

$\{A \subseteq X \mid |A| = 2\}$

un **grafo** **semplice** e **finito** é una coppie (V, E) tale che

$V :=$ un insieme finito

$E \subseteq \binom{V}{2}$

cioé gli elementi di E sono sottoinsieme di vertici **distinti** di cardinalitá 2.

gli elementi di E sono gli **archi** del grafo

gli elementi di V sono ~~g~~ i **vertici** o **nodi** del ~~g~~grafo

pensando in termine di relazione binaria

un ~~[illegible]~~ grafo $G = (V, E)$ $\longrightarrow$ relazione binaria sul insieme V e

$x R y \iff \{x, y\} \in E$

R é simmetrica perché siccome gli elementi di E non sono ordinati, allora se $xRy \Rightarrow yRx$

R non é riflessiva perché gli elementi di E sono insieme (senza elementi che si ripetono) di card. 2.

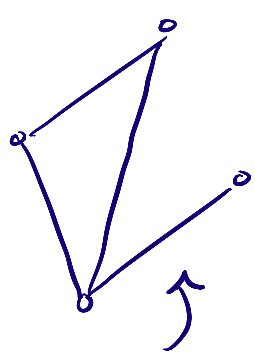
R non é neanche r (riflessiva) perché abbiamo $\forall\ x, (x,x) \notin R$

e vice versa: se R sia una rel. binaria su un isieme finito V con le proprietá

- R é simmetrica
- $\forall\ x, (x,x) \notin R$

allora (V, R) sia un grafo semplice e finito.

<u>Notazione</u> (V,E) un grafo allora vertici $x, y \in V$ sono <u>adiecente</u> se $\{x,y\} \in E$ e per un elemento $\{x,y\} \in E$, l'arco $\{x,y\}$ é <u>incedente</u> ai vertici x, y.



representazione (grafica) del grafo con punti e segmenti lineare nel piano.

$(\{1,2,3,4\}, \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}\})$

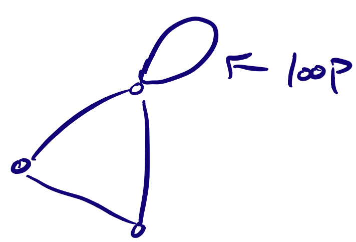
<u>Def</u> un multi-insieme e un collezione di oggetti con ~~ripetezioni~~ possible ripetezione dei oggetti.

per esempio $\{x, x, x\}$

V un isieme, e E un sotto inseime del insieme di multi insieme di V di ~~di~~ card. 2

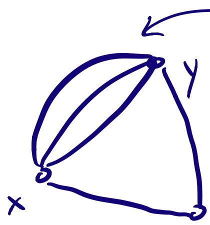
guindi con la possibilitá di un elemento di E come $\{x, x\}$

un tale elemento di E é detto un loop nel grafo e consiste di un arco con un solo ~~es~~ termine.



Se V è un insieme finito e E un sotto multi-insieme di $\binom{V}{2}$

guindi, é possible che E contiene $\{\{x,y\}, \{x,y\}, \{x,y\}\}$

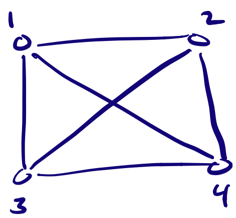


archi paralleli

tra x e y.

Conclusione si può aggiungere alla definizione la possibilità di loops e archi paralleli, ma di solito consideriamo grafi semplici e finiti.

Notazione

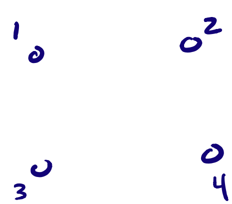


grafo completo con vertici $\{1,2,3,4\}$

un grafo e sui vertici V è **completo** se $E = \binom{V}{2}$

scriviamo K_n per il grafo completo su n vertici

invece, se $E = \emptyset$, diciamo che il grafo è **totalmente sconnesso**



e scriviamo E_n per il grafo totalmente sconnesso con n vertici